物理オリンピックを目指す
中学生高校生のための数学

大原　仁 著
公益社団法人　物理オリンピック日本委員会 監修

まえがき

国際物理オリンピックの大会は 1967 年から開かれてきましたが, 日本チームが参加したのは 2006 年からです. これまでも日本チームは数々の成果を出してきました. 代表選手は高校三年生が主ですが, 中に中学時代に物理チャレンジに挑戦して, 高一または高二で代表になり活躍してきた人たちもいました.

2023 年に国際物理オリンピックの日本大会が東京で開かれます. これを機会に, こうした若いチャレンジャーたちを応援すべく, 中学の知識で高校数学を理解できるテキストを作成してみました.

物理学では数学は道具であり, 数学的な知識がなければ物理オリンピックの問題を解くことが難しいように思われます. このテキストでは物理オリンピックに必要な数学を学習します. 特に微積分については必要と思われる知識が十分につくことを目指しています. もちろん, 学力をつけるために, 最終的には演習量がものをいうことはいうまでもありません.

また, 物理オリンピックの試験では関数電卓を使用します. おりにふれて関数電卓の使用法を説明しています. また, 物理オリンピックの試験ではネットに接続することは禁止されていますが日常の学習では便利だと思い, 自動計算サイトの紹介も行っています.

その他, ベクトルの外積や双曲線関数など物理オリンピックで必要と思われる高校教科書にない分野も取り上げています.

このテキストは数学および物理の受験には役立つだろうとは思いますが, このテキストだけで数学, 物理の受験勉強ができるわけではありません. 高校数学でも, 代数的な内容の因数定理, 剰余定理など, 整数問題, 複素数平面などは, 必要最低限しか扱っていません. また, 集合, 確率統計や初等幾何など物理で当面扱うことのないと思われる分野は扱っていません. また行列・一次変換については物理オリンピックで扱わないので取り上げませんでした.

このテキストは数学を中心に系統立てて解説し, 各数学的分野で応用する物理的問題を並べるという考え方で物理を扱っています. そのため物理分野は系統だった扱いはしていません. また, したがって, とり上げていない分野が多々あると思われます.

皆さんの健闘を祈ります.

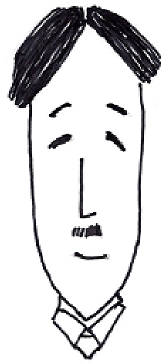
目　次

囲み記事

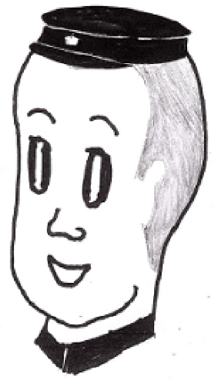
物理オリンピックを目指す中学生高校生のための数学

登場人物

先生 :	土藝智　光秀先生	(窮理中学物理部顧問)
三好 :	三好　正解	(同三年生物理部部長)
又兵衛 :	誤答　又兵衛	(同三年生物理部員)
チャチャ :	浅井　チャチャ	(同三年生物理部員)



先生



三好

又兵衛

チャチャ

先生 「さあこれから物理オリンピックを目指して数学を勉強しよう.」

第 1 章　いろいろな関数

1　関数

2 つの変数 x, y について, x が定まれば, それによって, y がただ 1 つ定まるとき, y は x の**関数**であるといいます.

このとき, $y = f(x)$ のようにかくことがあります. f は関数の名前で, x に対して y がどのように定まるかを文字で表したものです. 決して $f \times (x)$ ではありません.

$x = a$ のとき $y = f(a)$ と表します.

$y = f(x)$ において変数 x のとりうる値の範囲を**定義域**, y のとりうる値の範囲を**値域**といいます.

x, y の値を原点で直交する数直線で表し, それらを**座標軸**といい, それぞれを **x 軸, y 軸**といいます. この平面を**座標平面**といいます. なお x, y 以外の文字で関数を表すこともあります, 例えば t が s の関数である場合には**横軸を s 軸, 縦軸を t 軸**にとったりします.

座標平面は x 軸, y 軸によって 4 つの部分に分けられます. 4 つの部分を**象限**（しょうげん）といいます. それぞれの象限は図 1- 1 のように**第 1 象限, 第 2 象限, 第 3 象限, 第 4 象限**といいます.

第 1 象限　$x > 0$, $y > 0$ の部分
第 2 象限　$x < 0$, $y > 0$ の部分
第 3 象限　$x < 0$, $y < 0$ の部分
第 4 象限　$x > 0$, $y < 0$ の部分

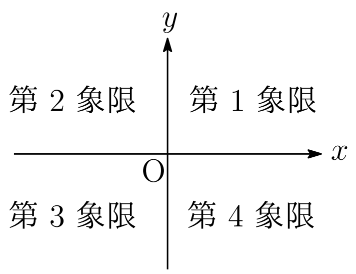


図 1- 1

x と y との関係式 $y = f(x)$ が与えられているとき, 座標平面上でこの関係式をみたす点を図示したものを, $y = f(x)$ の**グラフ**といいます.

2　比例関係と 1 次関数

比例関係は知っているでしょう. x と y が比例するとき $y = ax$ のようにかけます. このとき, a を**比例定数**と呼びます.

例えば, x が時間で, y が移動距離だとします. ある人が毎分 a m の速さで歩いているとき, x 分後には $y = ax$ m だけ移動しているはずです. このとき, x を 2 倍にすると, y も 2 倍になります. これりますが比例関係ですね. グラフをかくと直線を描きます.

グラフが直線になるのは比例関係にあるときだけではありません. 最初 $x = 0$ のときのスタート地点が, $y = b$ で, 毎分 am で歩くならば, x 分後に $y = ax + b$ の位置にいることになります.

$y = ax + b$ $(a \neq 0)$ のように x に対して y が x の 1 次式で表される関数を x の **1 次関数**といいます.

フックの法則

バネの伸びや縮み x は, バネに加えた力 f に比例するという法則です. それを

$$f = kx$$

とかき, 比例係数 k を**バネ定数**といいます. 比例係数 k がわかっているバネを使えば, 逆にバネの伸び縮みから加えられた力の大きさを知ることができます. それがバネばかりの原理です.

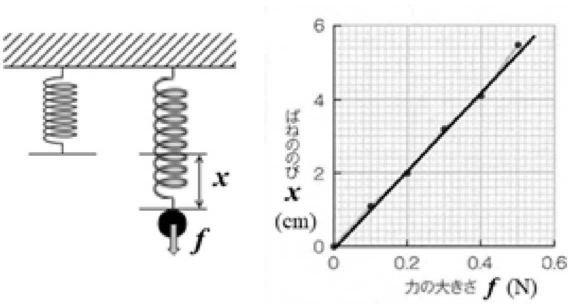


図 1-2

チャチャ「バネの伸びはフックの法則にしたがうと力の大きさに比例するというから, バネの長さは 1 次関数になるのね.」

先生「その通りですね. バネにはたらく力の大きさを f, そのときのバネの伸びを x とすると, $f = kx$ となります. このときの比例係数 k を**バネ定数**と呼びます.」

又兵衛「バネに 1kg のおもりを付けた場合と, 2kg のおもりを付けた場合ではバネの長さは 2 倍になるのだ.」

先生「おいおい又兵衛, バネの長さが 2 倍になるのではなく, 伸びが 2 倍になるのだよ. バネの長さを l とすると, $l = l_0 + \dfrac{f}{k}$ のように f の 1 次関数になるのだよ. l_0 はもとの長さだよ」

3　2 次関数

$y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ のように x に対して y が x の 2 次式で表される関数を x の **2 次関数**といいます.

まず, $y = ax^2 (a \neq 0)$ のグラフをかいてみます.

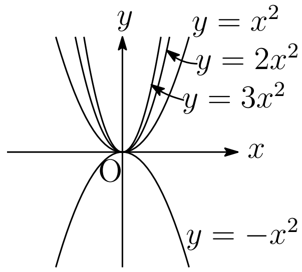


図 1- 3

図 1- 3 は $y = x^2,\ y = 2x^2,\ y = 3x^2,\ y = -x^2$ のグラフです.

$y = ax^2$ のグラフは

$a > 0$ のときは上に開いている (**下に凸**といいます).

$a < 0$ のときは下に開いている (**上に凸**といいます).

$a > 0$ のとき, a が大きくなると細くとがってきます.

$y = ax^2 (a \neq 0)$ のグラフの形は皆相似で, その形を**放物線**といいます.
ものを空中に投げたとき, その放り出した物体が描く軌道 (線) という意味です.


三好「バッターが打ったホームランボールの軌道は放物線ですね.」
又兵衛「キャッチャーフライだって放物線だろ.」


次に, $y = ax^2 + q$ のグラフをかいてみます.

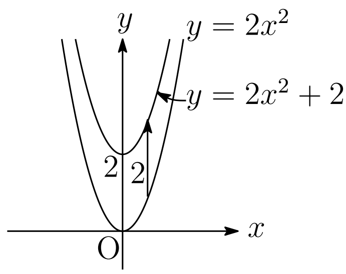


図 1- 4

図 1- 4 は $y = 2x^2$ のグラフと $y = 2x^2 + 2$ のグラフです.

各 x に対しいて 2 が加われば 2 だけ上に移動するわけですから, グラフ全体も 2 だけ上に移動します.

$y = ax^2 + q$ のグラフは, $y = ax^2$ のグラフを, y 軸方向に q だけ平行移動したものです.

次に, $y = a(x-p)^2$ のグラフをかいてみます.

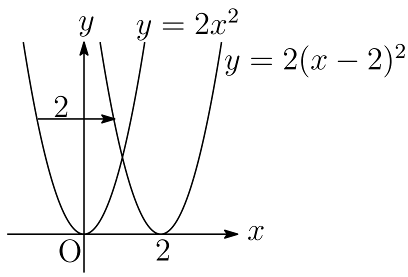


図 1- 5

図 1- 5 は $y = 2x^2$ のグラフと $y = 2(x-2)^2$ のグラフです.

$y = 2x^2$ は $x = 0$ のときに $y = 0$ になり, $y = 2(x-2)^2$ は $x = 2$ のときに $y = 0$ になります. $y = 2x^2$ の x の値に, 2 を加えた値を $y = 2(x-2)^2$ に代入すると y が同じ値になります.

$y = a(x-p)^2$ のグラフは, $y = ax^2$ のグラフを, x 軸方向に p だけ平行移動したものです.


又兵衛「$x - 2$ としたのに, 2 だけ進むのは変な感じがするなあ.」
三好「とりあえずこうおぼえておこうよ.」


次に, $y=a(x-p)^2+q$ のグラフをかいてみます.

これまで見てきたものを組み合わせればよいわけです.

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは, $y=ax^2$ のグラフを, x 軸方向に p だけ平行移動したのちに, y 軸方向に q だけ平行移動すればよいです.

それでは $y=ax^2+bx+c$ のグラフはどのように描いたらよいのでしょうか.

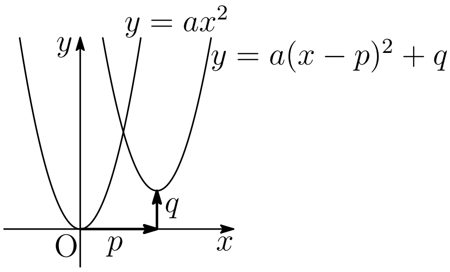


図 1- 6

具体的な例で考えてみましょう.

$y=2x^2-4x+7$ を考えます.

$$y=2x^2-4x+7=2(x^2-2x)+7=2(x-1)^2-2+7=2(x-1)^2+5.$$

のように変形します.

最初 ax^2+bx の部分を $a(x^2-\square\, x)$ のように変形します. 次に $(x-p)^2=\underline{x^2-2px}+p^2$ となるので, $\square$ を $2p$ とみて $(x-p)^2$ を作ります. 上の式では x^2-2x を $(x-1)^2-1$ とみています. 余った部分ともともとからある定数を加えれば $y=a(x-p)^2+q$ の形になります.

一般には

$$\begin{aligned} y=&ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \\ =&a\left\{x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right\}^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \qquad (1-1) \end{aligned}$$


三好「つまり, $p=-\dfrac{b}{2a}$ で $q=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ というわけですか.」


先生「そうだけど, こんな複雑な形をおぼえるより, 上でやった計算の手続きをおぼえておけばよいのだよ.」


チャチャ「結局, $y=ax^2+bx+c$ の形の式はすべて $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形できるのね.」


先生「その通り. 平行移動するけど, みんな放物線の形なんだ.」

4　グラフの移動と関数

2 次関数のグラフの移動を学習したので, 一般の関数のグラフの移動について考えてみましょう.
もとになる関数を

$$y = f(x) \tag{1-2}$$

とします.

4.1　平行移動

y 軸方向, x 軸方向への平行移動は 2 次関数と同様に考えればよいでしょう.

$y = f(x)$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動するには

$$y = f(x) + q \tag{1-3}$$

とすればよいです.

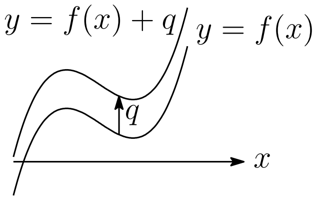


図 1- 7

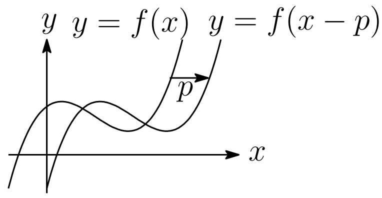


図 1- 8

$y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動するには

$$y = f(x - p) \tag{1-4}$$

とすればよいです.

一見するとこの 2 つの変形は異なるように思えますが, y 軸方向の移動は $(1-3)$ を

$$y - q = f(x) \tag{1-5}$$

とかき直したものです. y 軸方向の移動は y を $y-q$ でおきかえればよく, x 軸方向の移動は x を $x-p$ でおきかえればよいことがわかります.

x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動するには $(x,\ y)$ に $(x-p,\ y-q)$ を代入すればよいわけです.

$(x,\ y)$ という点を $(p,\ q)$ だけ平行移動した点は $(x+p,\ y+q)$ ですね. この点を $(x',\ y')$ とすると, $x' = x+p,\ y' = y+q$ です. 元の関数は $y = f(x)$ です. この関係を維持しながら, x' と y' の関係を出そうとすると, $x = x'-p,\ y = y'-q$ を代入することになるから $y'-q = f(x'-q)$ となるわけです. 通常は $'$ をつけずに表すから

$$y - q = f(x - p) \tag{1-6}$$

となるわけです.

4.2 対称移動

x 軸, y 軸, 原点についての対称移動を考えます.

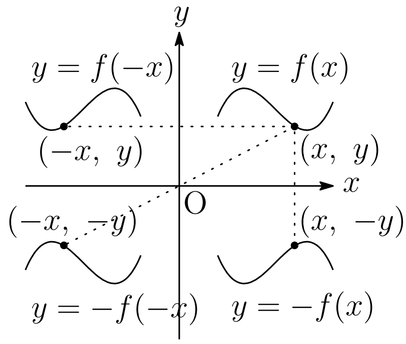


図 1- 9

点 $(x,\ y)$ を x 軸について線対称移動すると, x 座標はそのまま, y 座標の符号は反対になります. $y=f(x)$ のグラフを x 軸について線対称移動すると, $-y=f(x)$ つまり, $y=-f(x)$ のグラフになります.

点 $(x,\ y)$ を y 軸について線対称移動すると, y 座標はそのまま, x 座標の符号は反対になります. $y=f(x)$ のグラフを y 軸について線対称移動すると, $y=f(-x)$ のグラフになります.

点 $(x,\ y)$ を原点について点対称移動すると, x 座標, y 座標の符号はともに反対になります. $y=f(x)$ のグラフを原点について点対称移動すると, $y=-f(-x)$ のグラフになります.

x 軸に平行な直線 $y=q$ についての線対称移動は $y-q$ を $q-y$ でおきかえると考えればよいから結局 y を $2q-y$ でおきかえればよいです.

直線 $x=p$, 点 $(p,\ q)$ についての対称移動も同様に考えられます.

直線 $y=x$ についての線対称移動も重要です. これは x 軸と y 軸をとりかえることになるので, x と y をとりかえればよいです. つまり, $y=f(x)$ のグラフは直線 $y=x$ についての線対称移動で $x=f(y)$ のグラフになります.

ただ, $x=f(y)$ は x が y の関数であることを示しますが, y が x の関数であること. つまり, 1 つの x に対して 1 つの y が定まることは保証されません.

物理の言葉でいえば, x 軸や y 軸のについての対称移動は「鏡面対称」操作と呼び, 原点について点対称移動は,「空間反転対称」操作といいます.

4.3　縦, 横に a 倍

y を $\dfrac{y}{a}$ でおきかえると y 軸方向に a 倍になります.

例えば $y=x^2$ のグラフと $\dfrac{y}{2}=x^2$ つまり $y=2x^2$ のグラフを比べると, $y=2x^2$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを y 軸方向に 2 倍伸びています. (x 軸方向はそのまま)

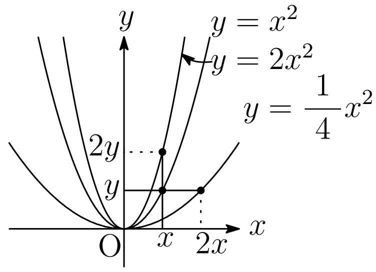


図 1-10

x を $\dfrac{x}{a}$ でおきかえると x 軸方向に a 倍になります.

例えば $y=x^2$ のグラフと $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ つまり $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフを比べると, $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に 2 倍伸びています. (y 軸方向はそのまま)

$(x,\ y)$ を $\left(\dfrac{x}{a},\ \dfrac{y}{a}\right)$ でおきかえるとグラフは原点を相似中心として a 倍の相似図形になります.

例えば $y=x^2$ のグラフと $\dfrac{y}{2}=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ つまり $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを比べると, $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを原点を中心に 2 倍相似拡大したグラフになります.

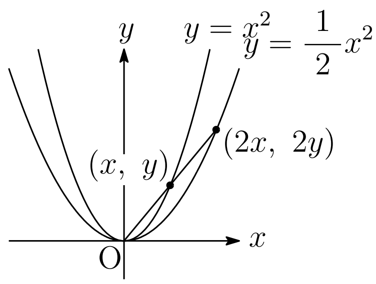


図 1-11

5　反比例関係と分数関数

$y=\dfrac{k}{x}$ のとき, x と y の関係を**反比例**といいます. $xy=k,\ x=\dfrac{k}{y}$ とも表されます.

k を**比例定数**とする反比例 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフは図 1-12 のようになります.

図 1-12 は $k>0$ の図で, 第 1 象限と第 3 象限のグラフになっています. $a<0$ のときは同様なグラフで, 第 2 象限と第 4 象限のグラフになります.

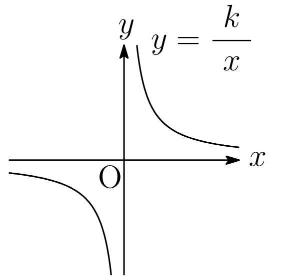


図 1-12

この曲線を**双曲線**といいます. そして, この曲線は原点から遠ざかるにしたがって, x 軸および y 軸に限りなく近づいてゆきます. このように遠くにゆくにしたがって曲線がある直線に近づくとき, その直線を**漸近線**といいます. 反比例のグラフでは x 軸, y 軸が漸近線です. また双曲線はまだ他の形がありますが, 漸近線が直交している双曲線を**直角双曲線**といいます.

ボイルの法則

ある一定の温度での気体の体積は, 気体の圧力に反比例するという法則です. 1662 年にロバート・ボイルにより示されました. 例えば, シリンダー内の閉じ込められた気体の体積を V とし, そのときの圧力を P としますと, 両者の積は一定値 C になります :

$$P \cdot V = C \quad (\text{一定値})$$

これは, $P = \dfrac{C}{V}$ または $V = \dfrac{C}{P}$ ともかけます. つまり, 圧力は体積に反比例する, あるいは, 体積は圧力に反比例するといいます.

図 1-13 のように, 2 倍の力で気体を押すと, 体積は半分になり, 3 倍の力で押すと, 体積は 1/3 になります. 体積が半分になると, 中に閉じ込められた気体分子が壁やピストンに衝突する頻度が 2 倍になるため, その結果, 圧力が 2 倍になります.

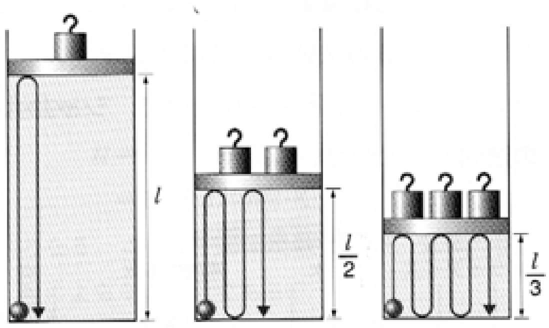


図 1-13

チャチャ「おもりを 2 倍にすることで力が 2 倍になったってわかるんだ」

$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ a:b \neq c:d)$ のように分母, 分子が x の 1 次式 (分子は定数でもよい) で表される関数を x の **1 次分数関数**といいます.

ここで, 反比例 $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動すると,

$$y - q = \frac{k}{x-p} \quad y = q + \frac{k}{x-p} \tag{1-7}$$

となります.

$\dfrac{ax+b}{cx+d}$ を変形して $q + \dfrac{k}{x-p}$ の形にできれば, 分数関数のグラフはかけるはずです.

$y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ について考えてみましょう.

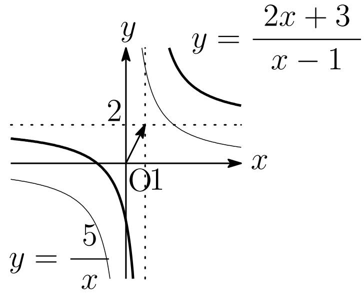


図 1-14

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}$$

のようにかけます. したがって, $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ のグラフは, $y = \dfrac{5}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1, y 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフです.

平行移動すると漸近線も平行移動します. 上の関数のグラフでは, $x = 1,\ y = 2$ が漸近線です.

一般に, $c \neq 0$ だから, $a' = \dfrac{a}{c},\ b' = \dfrac{b}{c},\ d' = \dfrac{d}{c}$ とおくと, $\dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a'x+b'}{x+d'}$ とかけて,

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a'x+b'}{x+d'} = \frac{a'(x+d') - a'd' + b'}{x+d'} = a' + \frac{-(a'd'-b')}{x+d'} \qquad (1-8)$$

のように変形されます.

$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフは $y = -\dfrac{a'd'-b'}{x}$ $\quad \left(a'd' - b' = \dfrac{ad-bc}{c^2}\right)$ のグラフを x 軸方向に $-d'$, y 軸方向に a' だけ平行移動したグラフです.

先生「この結果もおぼえる必要はありません. 分母を $x - p(= x + d')$ の形にすれば, 分子から $x - p$ をくくりだして残りを整理すれば自然に形が出来上がります. ですから, 上で述べたような式の変形のやり方をおぼえておけばいいのですよ」

三好「ふうーん」

$y = x + \dfrac{1}{x}$ のグラフと相加平均・相乗平均の関係

$y = x + \dfrac{1}{x}$ のグラフを考えてみましょう.

$y = x$ と $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフのかきかたはすでに学習していますね.

このように 2 つの関数のグラフがすでにわかっているときに, その和のグラフの概形がわかる簡単な方法があります.

同じ x に対して, $y_1 = x,\ y_2 = \dfrac{1}{x}$ とすると, $y = y_1 + y_2$ だから, y_1 のうえに y_2 をかさ上げして加えてゆけばよいのです.

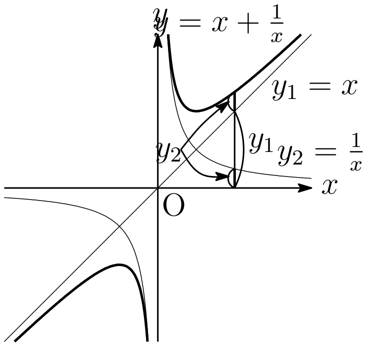


図 1-15

$y = x + \dfrac{1}{x}$ のグラフは, $x = 0$ の近くでは $y = \dfrac{1}{x}$ で, $|x|$ が大きいときには $y = x$ に近づいてゆくことがわかります.

このように, 2 つの関数のグラフを同じ平面上で加え合わせて新たな関数のグラフを作ることを, **グラフの合成**といいます.

この直後 **8** に出てくる**関数の合成**とは名前が似ていますが全く別のものです.

図 1-15 のグラフをみていると, $x + \dfrac{1}{x}$ の $x > 0$ における最小値を知りたくなります.

ここで**相加平均・相乗平均の関係**を学習しましょう.

$a,\ b$ が正の数のとき, $a,\ b$ の平均は 2 通り考えられます.

1 つは $\dfrac{a+b}{2}$ でこれを $a,\ b$ の**相加平均**といいます.

もうひとつは, $a,\ b$ を辺とする長方形と同じ面積の正方形の 1 辺の長さに相当する $\sqrt{ab}$ です. これを $a,\ b$ の**相乗平均**といいます.

相加平均と相乗平均の間には

$$(\text{相加平均}) \geqq (\text{相乗平均})\ \text{つまり}\ \frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \tag{1-9}$$

の関係があります.

その証明は $a > 0,\ b > 0$ から $\sqrt{a},\ \sqrt{b}$ が存在して,

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geqq 0$$

という形で証明されます. 等号は $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ すなわち $a=b$ のときに成り立ちます.

さて, x, $\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ について, 相加平均・相乗平均の関係を用いると,

$$\frac{x+\dfrac{1}{x}}{2} \geqq \sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=1$$

が成り立ちます. 右辺が定数なので,

$$x+\frac{1}{x} \geqq 2 \tag{1-10}$$

という関係が成り立ちます.

等号は $x=\dfrac{1}{x}$ のときに成り立ちます. このとき, x はその平均値 1 に等しくなります.

それ以外のときには $x+\dfrac{1}{x}$ は 2 より大きくなりますから, $x+\dfrac{1}{x}$ は $x=1$ のときに最小値 2 をとることがわかります.

このように, ある関数について, 定数との不等式がわかっているときそれを利用すると最大値, 最小値を求められます.

なお $x<0$ のときについては

$$(-x)+\frac{1}{-x} \geqq 2 \iff x+\frac{1}{x} \leqq -2 \tag{$1-10$}'$$

から, $x=-1$ のときに最大値 -2 をとることがわかります.